ホワイトノイズ超汎関数とウィック積 (非可換解析とミクロ・マクロ双対性)

西郷, 甲矢人

数理解析研究所講究録
第 1609 巻 2008 年 223-230

ホワイトノイズ超汎関数とウィック積

西郷甲矢人（RIMS）

Abstract

ホワイトノイズは、直観的には「ブラウン運動の時間微分」として捉えられる。ホワイトノイズ理論（飛田カルキュラス）においては、この量に数学的な定義を与え、そこから種々のランダム量を組み上げることを通じて、無限自由度のゆらぎが扱われる。枠組みとして「超関数空間の上の超汎関数空間」が用いられ、その構造から「パラメータ空間の各点に付随した生成消滅作用素」が自然に現れてくる。

本稿は、長谷部・小嶋との共著論文 [7] の解説であり、ホワイトノイズ理論における「ウィック積（正規順序積）」の概念と役割を説明し、ホワイトノイズ超汎関数の空間がウィック積に関して整域をなす（零因子を持たない）ことを示す。この際有限自由度との類似や複素解析的構造の役割を明示しながら、無限自由度のカルキュラスをより豊かなものにする展望を述べたい。

1 S 変換と超汎関数の空間

ホワイトノイズ理論の出発点は、「ガウス測度で重み付けられた見本超関数の空間」である。ゲルファントの三つ組

$$S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$$

に対してボホナー・ミンロスの定理を適用し、

$$\int_{S'(\mathbb{R})} e^{i\langle x,f\rangle} d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}(f,f)}$$

をみたす $S'(\mathbb{R})$ 上のガウス測度 μ を得る。ここで $S(\mathbb{R})$ および $S'(\mathbb{R})$ はそれぞれ急減少関数の空間および緩増加超関数の空間を表す。$(S'(\mathbb{R}), \mu)$ はホワイトノイズ空間と呼ばれる [1]。

次に、ホワイトノイズ空間上の汎関数空間を考える。まず複素数値 L^2 関数全体

$$(L^2) := L^2(S'(\mathbb{R}), \mu)$$

をとると、（テスト関数を L^2 にまで拡張して得られる）(L^2) の元

$$B_t := \langle x, 1_{[0,t]}\rangle$$

はブラウン運動の表現となっている。一方その「微分」は、形式的には $\langle x, \delta_t \rangle$ と考えられるが、(L^2) の元とはなり得ない。しかし $\langle x, \delta_t \rangle$ という形式は、有限自由度の解析における座標系 $\langle x, e_k \rangle$（ただし $\{e_k\}$ は標準基底）の自然な類似となっている。以下、無限自由度の解析における座標系として「各点ごとのホワイトノイズ」$x_t = \langle x, \delta_t \rangle$ を導入し、活用したい。

ここでS変換を

$$\mathcal{S} : (L^2) \ni \phi \mapsto (\mathcal{S}\phi)(\xi) := \int_{S'(\mathbb{R})} \phi(x+\xi) d\mu(x), \quad \xi \in S(\mathbb{R})$$

として導入する。すると (L^2) は

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n,$$

$$\mathcal{S}(H_n) = \left\{ \langle f_n, \ \rangle : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_n(u) \xi^{\otimes n}(u) du \mid f_n \in L^2(\mathbb{R}^n)_{sym} \right\}$$

と直和分解される。ここで $L^2(\mathbb{R}^n)_{sym}$ は、（ボソンフォック空間における対称テンソル積の構造に対応した）$\mathbb{R}^n$ 上の対称な L^2 関数を表す。このとき

$$\mathcal{S}\phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \xi^{\otimes n} \rangle$$

となる (L^2) の元は、対称な超関数 $: x^{\otimes n} : \in S(\mathbb{R}^n)'_{sym}$ を用いて

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes n} :, f_n \rangle$$

と書くことができる。これを ϕ のウィーナー・伊藤展開と呼ぶ。ここで $: x^{\otimes n} :$ は

$$: x^{\otimes 0} : = 1, \ : x^{\otimes 1} : = x, \ : x^{\otimes n} : =: x^{\otimes n-1} : \hat{\otimes} x - (n-1) : x^{\otimes n-2} : \hat{\otimes} Tr$$

により定義され、「超関数版のエルミート多項式」となっている。（なお Tr は $f \in S(\mathbb{R}^2)$ に $\int f(t,t)dt$ を対応させる対称超関数を、$\hat{\otimes}$ は対称テンソル積を表す。）

飛田 [2] は各 H_n を拡大することを通じて (L^2) を拡大し、ホワイトノイズ超汎関数の空間を導入した。ここにはブラウン運動の時間微分にあたる量が入っている。久保・竹中は、「第二量子化」の手法を用いて「高次のゲルファント三つ組」:

$$(S) \subset (L^2) := L^2(S'(\mathbb{R}), \mu) \subset (S)^*$$

を構成した [2]。$(S)^*$ は久保・竹中の超汎関数空間と呼ばれ、飛田の超汎関数空間の拡張となっている。他にも様々な拡張が考えられているが、本稿では $(S)^*$ を用いて議論する。

S 変換は $(S)^*$ 上定義された一対一写像にまで拡張され、$\Phi \in (S)^*$ の像 $\mathcal{S}\Phi$ は $F_n \in S(\mathbb{R}^n)'_{sym}$ を用いて

$$\mathcal{S}\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_n, \xi^{\otimes n} \rangle$$

と書ける。このとき Φ を

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes n} :, F_n \rangle$$

と書く。とくに $x_t = \langle x, \delta_t \rangle$ と書かれる元 $x_t \in (S)^*$ が存在し、$(S)^*$ 上の流れとして $x_t = \frac{d}{dt} B_t$ を満たす。これが各点 t におけるホワイトノイズである。

2 飛田の微分作用素

S 変換を用いて、微分作用素 $\partial_t : (S) \longrightarrow (S)$ を

$$\partial_t : \phi(x) \longrightarrow \mathcal{S}^{-1} \left\{ \frac{\delta}{\delta \xi(t)} (\mathcal{S}\phi)(\xi) \right\} (x)$$

と定義する。これは、任意の $\phi \in (S)$ に対して

$$\partial_t \phi(x) = D_{\delta_t} \phi(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(x + \varepsilon \delta_t) - \phi(x)}{\varepsilon}$$

を満たす。∂_t を、t における飛田の微分作用素とよぶ。その共役作用素 $\partial_t^* : (S)^* \longrightarrow (S)^*$ は

$$\partial_t^* : \phi(x) \longmapsto \mathcal{S}^{-1} \{ \xi(t) (\mathcal{S}\phi)(\xi) \} (x)$$

を満たす。これより $x_t = \partial_t^* 1$ がわかる。

飛田の微分作用素は、有限自由度の解析における偏微分の類似物である。重要なのは、飛田の微分作用素（「偏微分」）が、「全微分」を規定するという点である。これが「有限自由度からの無限自由度への拡張」と言う点から見て非常に自然なのである。具体的には、

$$(\nabla \phi)(x; t) := \partial_t \phi(x) \quad \phi \in (S)$$

により $\nabla : (S) \longrightarrow (S) \otimes S(\mathbb{R})$ が定まり、任意の $h \in S'(\mathbb{R})$ に関して

$$D_h \phi(x) := \langle h, \nabla \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(x + \varepsilon h) - \phi(x)}{\varepsilon} \qquad \phi \in (S)$$

が成立する。この D_h は h 方向の微分ということになる。その共役作用素は D_h^* と書かれる。

これらの微分作用素に関しては

$$[\partial_s, \partial_t] = [\partial_s^*, \partial_t^*] = 0$$
$$[\partial_s, \partial_t^*] = \delta(s-t)$$

が成り立つ。つまり、∂_t および ∂_t^* は「正準交換関係」を満たし、それぞれボソンフォック空間の消滅作用素および生成作用素に対応している。ここで上の「正準交換関係」の第二式は、厳密には

$$[D_\Phi, D_\phi^*] = \langle \Phi, \phi \rangle I$$

が任意の $\Phi \in S'(\mathbb{R})$ および $\phi \in S(\mathbb{R})$ について成立するという意味である。以上のようにして「各点に付随した生成消滅作用素の代数」が得られるが、この代数はホワイトノイズ理論において中心的な役割を果たす。特に、(S) から $(S)^*$ への連続作用素はすべて ∂_t および ∂_t^* から組み上げられるという点は重要である。この組み上げの手法は「フォック展開」[3] と呼ばれる。(なお、上に述べた「正準交換関係」の第二式の「形式的な表現」は、このフォック展開の観点から見ると非常に自然なものであることがわかる。詳しくは [3] を参照。) 例えばホワイトノイズによる掛け算作用素 $x_t\cdot$ は

$$x_t \cdot \ = \partial_t + \partial_t^*$$

と表される。(ここで x_t は、$(S)^*$ と (S) の双対ペアリング $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ に基づき

$$\langle\langle x_t \cdot y, \phi \rangle\rangle = \langle\langle x_t, y \cdot \phi \rangle\rangle$$

として定義される。)

ここでは、可換な確率変数が互いに非可換な作用素の和に分解されている。そして確率変数の個性を代数的な交換関係からも捉えることができるのである。このような分解は一般化されており、「量子分解」と呼ばれる [4]。量子分解の概念は、代数的な観点から出発して確率論・量子論・作用素環論を結びつけるための基本的な手段と考えられる。

3 有限自由度との対応

S 変換の意味を理解するには、有限自由度での類似物を考えることが効果的である ([7])。簡単のため、1 自由度での類似物 $\mathcal{S}_1$ を

$$\mathcal{S}_1 : \phi(x) \mapsto (\mathcal{S}_1\phi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x+\xi) d\mu_1(x)$$

と定めよう。ただし、$d\mu_1(x) := e^{-\frac{x^2}{2}} dx/\sqrt{2\pi}$ とする。

$\mathcal{S}_1$ に関しては、以下のことが容易にわかる。

まず $\mathcal{S}_1$ は、ξ についての微分作用素 $\dfrac{d}{d\xi}$ を x についての微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ に引き戻す。同時に、ξ についての掛け算作用素 ξ を x についての作用素 $x-\dfrac{d}{dx}$ に引き戻す。ここで、$x-\dfrac{d}{dx}$ は、

$$\int_{\mathbb{R}}\left\{\left(x-\frac{d}{dx}\right)f\right\}ge^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{\mathbb{R}}f\left\{\frac{d}{dx}g\right\}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

の意味で、$\dfrac{d}{dx}$ の共役となっている。

重要なのは、共役関係がガウス測度 $d\mu_1$ に関するものだということである。ルベーグ測度に関しては、$\dfrac{d}{dx}$ の共役は $-\dfrac{d}{dx}$ であり、もちろん互いに可換である。ところが $\dfrac{d}{dx}$ と $x-\dfrac{d}{dx}$ は正準交換関係をみたす。そして両者の和をとれば変数 x が得られる。これは前節で述べた量子分解の雛形となっている。

なお、$x-\dfrac{d}{dx}$ を繰り返し「真空」1 に作用させると、ガウス測度に関する直交多項式すなわちエルミート多項式が生成されることにも着目したい。

以上を踏まえ、$\dfrac{d}{dx}$ と $x-\dfrac{d}{dx}$ とをそれぞれ飛田の微分作用素とその共役作用素の類似であると考えると、第 3 節で述べた内容の自然さが理解できる。

あるいはむしろ、「S 変換が本質的なのは、有限自由度の解析における代数的な構造を無限自由度にまで拡張する点である」とも考えられる。量子分解が S 変換から自然に現れることは特に興味深い。

ここで有限自由度と無限自由度（ホワイトノイズ理論）との対応関係を整理しておく。

＜対応表＞	有限自由度	無限自由度
基礎空間	$\mathbb{R}^n$	$S'(\mathbb{R})$
測度	ルベーグ $\Vert$ ガウス	ガウス
三つ組	$S(\mathbb{R}^n)\subset L^2(\mathbb{R}^n)\subset S'(\mathbb{R}^n)$	$(S)\subset(L^2)\subset(S)^*$
座標系	$x_k=\langle x,e_k\rangle$	$x_t=\langle x,\delta_t\rangle$
偏微分	$\frac{\partial}{\partial x_k}$	∂_t
共役偏微分	$-\frac{\partial}{\partial x_k}\Vert x_k-\frac{\partial}{\partial x_k}$	∂_t^*

4　超汎関数の空間は整域をなす

前節までに見たように、S 変換はホワイトノイズ超汎関数の代数構造を統制している。この S 変換を用いて、二つの超汎関数同士の積を考えることができる。そのために、まず S 変換の像の特徴づけについて述べる。

S 変換の像が、急減少関数空間の複素化 $\mathcal{S}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ の上で定義された複素数値汎関数となることは定義より明らかであるが、逆にどのような汎関数が S 変換の像となるであろうか。ポトフおよびシュトライトは以下の定理を示した：

Theorem 1 (Potthoff and Streit [5]) $\mathcal{S}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ 上定義された複素数値汎関数 F が、あるホワイトノイズ超汎関数の S 変換による像となるための必要十分条件は、次の二条件を満たすことである。*(i)* 任意の $\mathcal{S}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ の元 ξ, η に対して、z の関数 $F(z\xi+\eta)$ は $\mathbb{C}$ 上の整関数となる。
(ii) 定数 $K, a, p \geq 0$ が存在して、

$$|F(z\xi)| \leq Ke^{a|z|^2 \|H^p\xi\|_2{}^2}$$

をみたす。（ここで H は、調和振動子のハミルトニアンであり、スペクトルとして $\{2k+2|k=0,1,2,3,\cdots\}$ をもつものである。）

Definition 2 上記 *(i)*,*(ii)* を満たす汎関数を、U 汎関数と呼ぶ。

U 汎関数の全体は、各点ごとの積に関して代数をなすことがわかる。したがって、この事実と S が一対一であることとを用いると、ホワイトノイズ超汎関数同士の積を

$$a \diamond b := \mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}a \cdot \mathcal{S}b)$$

として定義できる。この新しい積演算 $\diamond$ を、ウィック積あるいは正規順序積と呼ぶ。定義から直ちに、ウィック積が結合的かつ可換な積であることがわかる。

また、ホワイトノイズの n 次エルミート多項式と m 次エルミート多項式のウィック積は $n+m$ 次エルミート多項式になることもわかる。このことはここで定義されたウィック積（正規順序積）の名をふさわしいものにしている。なぜなら、ホワイトノイズを量子分解しその形式的な冪を「正規順序になおしてから」真空 1 に作用させたものこそ、エルミート多項式に他ならないからである。

ここで定義されたウィック積には様々な応用がある。例えば、

$$\int_{\mathbb{R}} Y_t \delta B_t := \int_{\mathbb{R}} Y_t \diamond x_t dt$$

の右辺が $(S)^*$ 値の積分として意味をもつとき、すなわち任意の $\phi \in (S)$ に対して

$$\langle \int_{\mathbb{R}} Y_t \diamond x_t dt, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle Y_t \diamond x_t, \phi \rangle dt$$

を満たす唯一の $(S)^*$ の元として定まるとき、上の積分を櫃田 - スコロホド積分と呼ぶが、これは伊藤の確率積分の拡張となっている。

このように、ウィック積の構造自体は確率解析の中に存在しており、それが S 変換およびその像の特徴づけを通して、明確に浮かび上がったといえよう。ウィック積による「書き直し」の意義は、単に概念の拡張にあるばかりではなく、有限自由度との類似性が見やすくなるという点にもある。

例えばウィック積は時間方向の微分について積の微分の公式を満たし、あたかも通常の微積分のように計算を推し進めることができる。これらの利点に着目して、ウィック積およびS変換（あるいはそれと関連する「エルミート変換」）を確率偏微分方程式の理論に役立てようとする研究もある [6]。

上記のような応用がある一方、ウィック積に関する議論は、ウィーナー・伊藤展開に基づく具体的な計算や解の構成、増大度による特徴づけなどが主であった。ここに代数構造そのものに着目する視点を導入することにより、「ウィック積に零因子が存在するか」という、極めて基本的な問題が浮上する。長谷部、小嶋と私は「超汎関数の空間はウィック積に関して整域をなす」ことを見出した [7]。「S変換の像の特徴づけ定理」を用いれば、以下のように単純な証明が得られるので、この結果は逆にポトフ・シュトライトの定理に含意された代数的な構造をも浮き彫りにすることとなった。

Theorem 3 $(S)^*$ はウィック積に関して整域をなす。

Proof. $\mathcal{S}$ はU汎関数全体への同型写像となるので、U汎関数の全体が各点ごとの積に関して整域となることを示せばよい。いま、二つのU汎関数 U_1 と U_2 が $U_1U_2=0$ を満たすとする。つまり任意の $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ に関して $U_1(f)U_2(f)=0$ であるとする。ここで U_1 が恒等的には零でないとすると、ある f が存在して $U_1(f)\neq 0$ となる。定義の (i) から判るU汎関数の連続性より、各 g に対して十分小さな正数 $c>0$ が選べて、任意の $|\lambda|\leq c$ に対しては $U_1(f+\lambda g)\neq 0$ となる。したがってそのような λ については $U_2(f+\lambda g)=0$ である。ここで再び条件 (i) を用いると、整関数の性質から、任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して $U_2(f+\lambda g)=0$ である。g のとり方は任意であったから、U_2 が恒等的に零であることがわかる。■

5 総括と展望

上記の証明は、特徴づけ定理の条件 (i) における「整関数の性質」に拠っている。このため、実は $(S)^*$ 以外の超関数空間に関しても同様な論法が使える。

一方、定理の結果から超汎関数空間のウィック積に関する商体を考えることができる。この商体は、S変換を通じて「有理型関数の性質」を反映し、（単に形式的な解を与えるだけではなく）具体的な計算や増大度による特徴づけとも関係付けられるだろう。これにより、「ウィック積が超関数的な特異性を除去する余り、意味のある特異性までが理論から消えてしまう」といった問題意識に対して、「商体のなかで（有理型関数的な）特異性を取り込む」可能性が開かれることになる。

もう一点指摘しておきたいことがある。それは上記の定理と「ティッチマーシュの定理」との類似である。すなわち

Theorem 4 (Titchmarsh [8]) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上定義された複素数値連続関数の全体は、畳み込み $*$ に関して整域をなす。

ここで $*$ は

$$a*b(t) := \int_0^t a(t-u)b(u)du \qquad (0 \leq t < \infty)$$

により定義される。ミクシンスキはこの定理を基礎に据え、畳み込みに関する商体を構成した。この商体の中に含まれる、1の（畳み込みに関する）逆元が微分作用素として同定され、ヘヴィサイドの演算子法の代数的な正当化を成し遂げた [8]。これも「商体により特異性を取り込む」一例といえる。

本稿の作成に当たり、数々の有益な助言を頂いた原田僚君、安藤浩志君、西村恵君に感謝します。

References

[1] Hida, T., Kuo, H.-H., Potthoff, J. and Streit, L., *White Noise*, Kluwer (1993).

[2] 超汎関数の概念は最初 Hida, T., *Analysis of Brownian functionals*, Carleton Math. Notes **13** (1975) において導入された。本論文においては Kubo, I. and Takenaka, S.: Calculus on Gaussian white noise, I-IV. Proc. Japan Acad. **56A**,376-380(1980); **56A**,411-416(1980); **57A**,433-437(1981); **58A**,186-189(1982) で導入されたものを用いる。

[3] Obata,N., *White noise calculus and Fock space*, Lecture Notes in Math **1577**, Springer-Verlag (1994)

[4] Hashimoto,Y.: Quantum decomposition in descrete groups and interacting Fock space, Infin.Dimen.Anal.Quantum Probab. **4**,277-287.

[5] Potthoff, J. and Streit, L.: A characterization of Hida distributions, J. Funct. Anal. **101**, 212-229 (1991).

[6] Holden,H.,Øksendal,B.,Ubøe,J.,Zhang,T., *Stochastic Partial Differential Equations*,Birkhäuser (1996)

[7] Hasebe, T., Ojima, I. and Saigo, H.: No Zero Devisor for Wick Product in $(S)^*$, Infin.Dimen.Anal.Quantum Probab.,to appear.

[8] Mikusiński, J.: *Operational Calculus*, Pergamon Press (1959).